Turunan: Pengertian, Macam, Rumus, & Contoh Soal

Pembahasan mengenai turunan perlu untuk dipelajari. Dengan menggunakan konsep limit yang telah kalian pelajari, kalian akan dengan mudah mempelajari materi turunan berikut.

Turunan merupakan salah satu materi lanjutan dari [**limit fungsi**](https://rumuspintar.com/limit-fungsi/).

Masih ingatkah kalian dengan materi limit? Konsep mengenai limit akan kita gunakan sebagai dasar dalam mempelajari materi ini.

Langsung saja, kita mulai dengan definisi turunan.

**Definisi Turunan**

Turunan merupakan suatu perhitungan terhadap perubahan nilai fungsi karena perubahan nilai input (variabel).

Turunan dapat disebut juga sebagai diferensial dan proses dalam menentukan turunan suatu fungsi disebut sebagai diferensiasi.

Menggunakan konsep limit yang sudah dipelajari, turunan dapat didefinisikan sebagai

Rumus Turunan

turunan tersebut didefinisikan sebagai limit dari perubahan rata-rata dari nilai fungsi terhadap variabel x.

Selanjutnya akan dijelaskan mengenai contoh penerapan turunan.

**Penerapan Turunan**

Berikut merupakan beberapa penerapan turunan.

* Turunan dapat diterapkan untuk menghitung gradien dari garis singgung suatu kurva.
* Turunan dapat digunakan untuk menentukan interval dimana suatu fungsi naik atau turun.
* Turunan dapat diterapkan untuk menentukan nilai stasioner suatu fungsi.
* Turunan dapat diterapkan dalam menyelesaikan permasalahan yang berkaitan dengan persamaaan gerak.
* Turunan dapat digunakan untuk menyelesaikan permasalahan maksimum-minimum.

Berikut ini akan dijelaskan mengena rumus turunan.

**Rumus Turunan**

Berikut merupakan beberapa rumus dasar untuk menentukan turunan.

* f(x) = c, dengan c merupakan konstanta

Turunan dari fungsi tersebut adalah f’(x) = 0.

* f(x) = x

Turunan dari fungsi tersebut adalah f’(x) = 1.

* f(x) = axn

Turunan dari fungsi tersebut adalah f’(x) = anxn – 1

* Penjumlahan fungsi:  h(x) = f(x) + g(x)

Turunan fungsi tersebut yaitu h’(x) = f’(x) + g’(x).

* Pengurangan fungsi: h(x) = f(x) – g(x)

Turunan fungsi tersebut adalah h’(x) = f’(x) – g’(x)

* Perkalian konstanta dengan suatu fungsi (kf)(x).

Turunan fungsi tersebut adalah k . f’(x).

Berikut ini akan dijelaskan mengenai turunan fungsi.

**Turunan Fungsi**

Misalkan terdapat suatu fungsi f(x) = axn. Turunan dari fungsi tersebut yaitu f’(x) = anxn – 1.

Contohnya yaitu:

f(x) = 3x3

turunan dari fungsi tersebut yaitu

f’(x) = 3 (3) x3 – 1 = 9 x2.

Contoh lainnya misalnya g(x) = -5y-3.

Turunan dari fungsi tersebut adalah g’(y) = -5 (-3) y-3 – 1 = 15y-4.

Berikut akan dijelaskan turunan fungsi aljabar.

**Turunan Fungsi Aljabar**

Pembahasan turunan fungsi aljabar pada bagian ini meliputi turunan dalam bentuk perkalian dan turunan dalam pembagian fungsi aljabar.

Turunan fungsi aljabar dalam bentuk perkalian yaitu sebagai berikut.

Misalkan terdapat perkalian fungsi: h(x) = u(x) . v(x).

Turunan dari fungsi tersebut yaitu h’(x) = u’(x) . v(x) + u(x) . v’(x).

**Keterangan:**

* h(x) : fungsi dalam bentuk perkalian fungsi.
* h’(x) : turunan fungsi bentuk perkalian
* u(x), v(x) : fungsi dengan variabel x
* u’(x), v’(x) : turunan fungsi dengan variabel x

Turunan fungsi aljabar dalam bentuk pembagian yaitu:

Misalkan terdapat perkalian fungsi: h(x) = u(x)/v(x). Turunan dari fungsi tersebut adalah

**h’(x) = (u’(x) . v(x) – u(x) . v’(x))/v2(x).**

**Keterangan:**

* h(x) : fungsi dalam bentuk perkalian fungsi.
* h’(x) : turunan fungsi bentuk perkalian
* u(x), v(x) : fungsi dengan variabel x
* u’(x), v’(x) : turunan fungsi dengan variabel x

*Baca juga****[Aljabar](https://rumuspintar.com/aljabar/)****.*

Berikut ini akan dijelaskan mengenai turunan akar.

**Turunan Akar**

Misalkan terdapat suatu fungsi akar sebagai berikut

Fungsi Turunan

Untuk menentukan turunan dari fungsi tersebut, terlebih dahulu kita ubah ke dalam bentuk fungsi perpangkatan. Bentuk fungsi perpangkatannya yaitu f(x) = xa/b.

Turunan dari fungsi tersebut yaitu f’(x) = a/b . x(a/b) – 1.

Bagaimana jika fungsi berbentuk seperti ini?

Fungsi Akar

Untuk menentukan turunan fungsi di atas, terlebih dahulu diubah ke bentuk perpangkatan.

f(x) = g(x)z/b

Turunan dari fungsi tersebut yaitu f’(x) = a/b . g(x)(a/b) – 1 . g’(x).

Berikut ini akan dijelaskan mengenai turunan parsial.

**Turunan Parsial**

Apa itu turunan parsial? Turunan parsial merupakan suatu turunan dari fungsi peubah banyak terhadap suatu peubah, sedangkan peubah yang lain dipertahankan.

Misalkan terdapat suatu fungsi: f(x, y) = 2xy, turunan parsial dari fungsi tersebut terhadap variabel x yaitu fx’(x, y) = 2y.

Contoh lainnya yaitu, terdapat fungsi g(x, y) = -3xy2

Turunan parsial terhadap variable y yaitu fy’(x, y) = -6xy.

Berikutnya akan dijelaskan mengenai turunan implisit.

**Turunan Implisit**

Turunan implisit ditentukan berdasarkan variabel yang terdapat dalam fungsi.

Suatu fungsi dengan variabel x, turunannya : x d/dx.

Suatu fungsi dengan variabel y, turunannya : y d/dy. dy/dx.

Suatu fungsi dengan variabel x dan y, turunannya : xy d/dx + xy d/dy . dy/dx.

*Baca juga****[Kalkulus](https://rumuspintar.com/kalkulus/)****.*

Agar lebih memaham mengenai turunan, coba kerjakan soal berikut kemudian periksalah jawaban kalian dengan menggunakan pembahasan pada bagian di bawah ini.

**Contoh Soal Turunan**

1. Tentukan turunan dari fungsi berikut.

* f(x) = 8
* g(x) = 3x + 5
* h(x) = 6x3
* k(x) = 3x5/3
* m(x) = (3x2 + 3)4

**Pembahasan**

* f’(x) = 0
* g’(x) = 3
* h’(x) = 6 (3) x3 – 1= 18x2
* k’(x) = 3 (5/3) x(5/3) – 1 = 5x2/3
* m’(x) = 4 . (3x2 + 3)4 – 1 . 6x = 24x . (3x2 + 3)3

2. Tentukan turunan dari fungsi berikut.

f(x) = (3x + 2) . (2x2 – 1)

**Pembahasan**

Misal: u(x) = 3x + 2 dan v(x) = 2x2 – 1

f’(x) = u’(x) . v(x) + u(x) . v’(x)

f’(x) = 3 . (2x2 – 1) + (3x + 2) . (4x)

f’(x) = 6x2 – 3 + 12x2 + 8x = 18x2 + 8x – 3

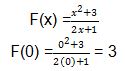
3. Diberikan sebuah fungsi ordo 2 seperti di bawah ini

Contoh Soal Turunan no 1 bagian 1

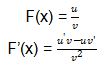
Tentukan nilai f(0) + 3f’(1)

**Pembahasan**

Untuk mengerjakan soal ini, kita dapat memasukkan nilai 0 ke dalam fungsi tersebut.



Setelah Anda, mendapatkan nilai f(0). Kita dapat mengerjakan turunan fungsi hasil bagi menggunakan salah sifat turunan.

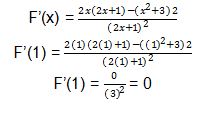


Untuk menggunakan rumus tersebut, kita dapat menggunakan pemisalan dan turunannya seperti di bawah ini.

U = x2 + 3 ; U’ = 2x

V = 2x + 1 ; V’ = 2

Kemudian, kita bisa memasukkan pemisalan tersebut ke dalam rumus turunan yang sebelumnya serta kita dapat secara langsung memasukkan f’x(1).



Maka, hasil f(0) + 3f’(1) = 3 + 3(0) = 3

4. Tentukan hasil turunan f(x) = (x2 + 2x + 3)(3x + 2)

**Pembahasan**

Sama seperti soal sebelumnya, Untuk mengerjakan soal turunan dalam bentuk perkalian, kita dapat menggunakan rumus sifat turunan serta menggunakan pemisalan dalam fungsi tersebut seperti di bawah ini.

F’(x) = u’v + uv’

U = x2 + 2x + 3 ; U’ = 2x + 3

V = 3x + 2 ; V’ = 3

F’(x) = u’v + uv’

F’(x) = (2x+3)(3x + 2) + (x2 + 2x + 3)(3)

F’(x) = 6x2+ 13x + 6 + 3x2+ 6x + 9

F’(x) = 9x2 + 19x + 15

Sehingga bentuk akhir F’(x) adalah 9x2 + 19x + 15

5. Jika terdapat f(x) = (2x-1)2(x+2). Berapakah nilai f’x(2)

**Pembahasan**

Untuk mengerjakan soal ini, kita bisa menggunakan sifat turunan fungsi f’(x) = u’v + v’u untuk mendapatkan hasil akhir. Sehingga kita dapat melakukan pemisalan kembali.

F’(x) = u’v + uv’

U= (2x-1)2 = 4x2– 4x + 1 ; U’ = 8x – 4

V = x + 2 ; V’ = 1

F’(x) = u’v + uv’

F’(x) = (8x – 4)(x + 2) + (4x2– 4x + 1)(1) ; kita dapat memasukkan nilai 2 seperti di soal

F’(2) = ((8(2) – 4)(2 + 2)) + ((4(2)2– 4(2) + 1)(1))

F’(2) = ((16-4)(4)) + ((16-8+1)(1))

F’(2) = 96 + 9 = 105

Sehingga nilai akhir F’(2) adalah 105

6. Tentukan sebuah garis singgung pada kurva y= -2x2 + 6x + 7 yang tegak lurus dengan garis x – 2y +13 = 0

**Pembahasan**

Disebutkan di dalam soal bahwa terdapat 2 garis yang saling tegak lurus, sehingga kita dapat mengasumsikan bahwa kedua garis memiliki kemiringan tertentu. Kita dapat menentukan nilai m1 dan m2 dari kedua garis.

m1merupakan slope dari garis y= -2x2 + 6x + 7. Untuk mencari nilai m1, dapat dilakukan dengan cara menurunkan fungsi y= -2x2 + 6x + 7.

m1= y’(x) = -4x + 6

m2merupakan slope dari x – 2y +13. Untuk mencari nilai m2, kita harus mengubah fungsi tersebut menjadi fungsi y.

x – 2y +13 = 0

x + 13 = 2y

y = 0,5x + 6.5

m2= y’(x) = 0,5

Dikarenakan kedua garis saling tegak lurus, maka nilai m1x m2= -1.

m1x m2= -1

(-4x + 6)0,5 = -1

-2x + 3 = -1

-2x =  -4

X = 2

Kita masukkan ke dalam persamaan m1sehingga di dapatkan nilai m1 = -2. Setelah menemukan nilai x, kita masukkan nilai tersebut ke fungsi y sehingga di dapatkan nilai y = 11.

Untuk membuat sebuah garis singgung, rumus yang digunakan adalah (y-y1) = m1(x – x1).

(y – 11) = -2 (x – 2)

Y – 11 = -2x +4

Y = -2x + 15

Garis singgung adalah y+2x-15 = 0

7. Terdapat sebuah box tanpa tutup dengan alas berbentuk persegi memiliki luas sebesar 512 cm2. Berapakah panjang rusuk agar volumenya memiliki nilai maksimum

**Pembahasan**

Pada soal tersebut, dijelaskan bahwa box tidak memiliki tutup. Sehingga, box tersebut terdiri dari 4 sisi dan 1 alas. Anggap sisi alas adalah s dan tinggi sisi adalah t. Kita dapat menuliskan persamaan box seperti di bawah ini.

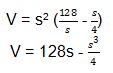
512 = luas alas + 4 sisi box

512 = s.s + 4.s.t  
512 = s2 + 4st  
512 – s2 = 4st

Contoh Soal Turunan no 5 bagian 1

Setelah mendapatkan t, kita bisa mencari volume dari box tersebut

V = s3 = s2 . t



Untuk mendapatkan volume maksimum, kita dapat menurunkan persamaan volume di atas

V’(s) = 0

Contoh Soal Turunan no 5 bagian 3

S2 = 170,67 cm2

S = 13,07 cm

Sehingga, panjang s yang dibutuhkan agar volumenya maksimum adalah 13,07 cm.